МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23 май 2023 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

ЧАСТ 1 (Време за работа: 90 минути)

Отговорите на задачите от 1. до 15. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Общото уравнение на права, минаваща през точките с координати $(3;-7)$ и $(-2;-2)$, е:

А) $9x-5y+14=0$

Б) $2x-5y+4=0$

В) $x+y+4=0$

Г) $9x+y-20=0$

2. Свободният член в нормалния вид на полинома $f(x)=(x^2+x-2)^3+(2x^3-1)^7$ е равен на:

А) -9 Б) -7 В) 1 Г) 2^7

3. Правоъгълникът $ABCD$ със страни $AB=3\,\text{cm}$ и $AD=5\,\text{cm}$ е завъртян на $360°$ около по-голямата си страна. Обемът на полученото ротационно тяло е:

А) $15\pi\ \text{cm}^3$ Б) $11{,}25\pi\ \text{cm}^3$ В) $75\pi\ \text{cm}^3$ Г) $45\pi\ \text{cm}^3$

4. Хоризонталната асимптота на функцията $f(x)=\dfrac{x+7}{5-3x}$ е:

А) $x=-\dfrac{5}{3}$ Б) $y=\dfrac{1}{3}$ В) $y=-\dfrac{1}{3}$ Г) $x=\dfrac{5}{3}$

5. Случайна величина X има биномно разпределение $Bi(12;p)$. Ако дисперсията на X е $1,92$, то стойността на p може да е:

А) $0,2$ Б) $0,35$ В) $0,49$ Г) $0,71$

6. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за които $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$ и $\measuredangle(\vec{a};\vec{b})=45^\circ$. Дължината на вектора $\vec{u}=3\vec{a}-2\vec{b}$ е:

А) $9\sqrt{2}$ Б) $3\sqrt{6}$ В) $3\sqrt{2}$ Г) 6

7. Спрямо правоъгълна координатна система разглеждаме точката с координати $(2;3)$ и права, зададена с уравнението $3x-4y+11=0$. Какво е разстоянието между тях?

А) $\frac{2}{5}$ Б) $\frac{3}{5}$ В) 1 Г) 2

8. В правилна четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагоналите AC_1 и A_1C са взаимноперпендикулярни. Да се намери острият ъгъл между BD_1 и B_1C_1.

А) 30°

Б) 45°

В) 60°

Г) 90°

9. Функцията $y(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(-x^2+4x+5\right)$ е растяща в интервала:

А) $x\in(-\infty;1)\cup[2;5)$

Б) $x\in[2;5)$

В) $x\in(1;2]\cup[5;+\infty)$

Г) $x\in(1;2]$

10. Намерете границата $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}$**.**

А) 0 Б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ В) 1 Г) 2

11. За кои стойности на параметъра p **редицата** $a_n=\dfrac{2n-p}{3n+1}$ **е растяща?**

А) $p\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)$

Б) $p\in\left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$

В) $p\in\left(-\dfrac{2}{5};+\infty\right)$

Г) $p\in\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$

12. Най-голямата стойност на функцията $f\left(x\right)=\cos x+\dfrac{x}{2}$ **за** $x\in\left[-\pi;\pi\right]$ **е:**

А) $-\dfrac{\pi}{2}-1$

Б) $\dfrac{\pi}{2}-1$

В) $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Г) $\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

13. Множеството от функционални стойности на $y(x)=\left(x+1\right)^2\left(x-2\right)^4$ **при** $x\in\left[1;4\right]$ **е:**

А) $y\in\left[0;16\right]$ Б) $y\in\left[4;400\right]$ В) $y\in\left[0;4\right]$ Г) $y\in\left[0;400\right]$

14. Функцията $f\left(x\right)=3x^4+4x^3-6x^2-12x+7$ **:**

А) има локален екстремум само при $x=1$

Б) има локален екстремум само при $x=-1$

В) има локални екстремуми при $x=1$ и $x=-1$

Г) няма локални екстремуми

15. Две урни имат следния състав: в първата – 6 **бели,** 4 **червени и** 15 **черни топки, във втората –** 15 **бели,** 2 **червени и** 8 **черни топки. След последователно вадене на топка от едната и от другата урна се оказва, че първо е извадена червена, а след това бяла топка. Каква е вероятността ваденето на топките да е станало първо от втората, а след това от първата урна, при условие че двете последователности на вадене са равновъзможни?**

А) $\frac{5}{6}$ Б) $\frac{1}{6}$ В) $\frac{36}{625}$ Г) $\frac{1}{3}$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23 май 2023 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

ЧАСТ 2 (Време за работа: 150 минути)

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 16. до 18. включително запишете в листа за отговори!

16. В триъгълна пирамида $ABCD$ равнините (ABD) и (ABC) са перпендикулярни. Ръбовете AD, BD, CD и BC са равни на 2 cm. Определете максималния обем на пирамидата и дължините на AB и AC, за които той се достига.

17.

а) Ако a е най-малкият положителен реален корен на уравнението $3x^5-4x^4-11x^3-11x^2-4x+3=0$, $b=4,(7)-10\frac{7}{9}$ и $c=\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sin(x-7)}{\sqrt{2x-5}-3}$, то намерете числата a, b и c.

б) Да се намерят координатите на точката T, в която допирателната към графиката на функцията $f(x)=3x^2-7x+6$ сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл с мярка 135°. Да се намери уравнението на допирателната в тази точка.

18. В правоъгълна координатна система е построен $\triangle ABC$. Точката A е с координати $(2;-1)$. През върха B са построени височина и медиана съответно с уравнения $h: 2x-y+1=0$ и $m: x+y+2=0$.

а) Да се намерят координатите на върховете B и C.

б) Да се намерят координатите на центъра P и дължината на радиуса R на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23 май 2023 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

Ключ с верните отговори

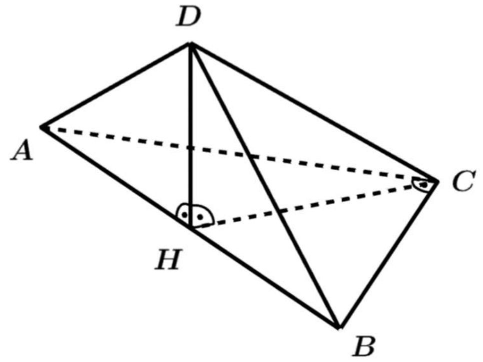
№	Отговор	Брой точки
1.	В	3
2.	А	3
3.	Г	3
4.	В	3
5.	А	3
6.	В	4
7.	В	4
8.	В	4
9.	Б	4
10.	А	4
11.	Б	4
12.	В	4
13.	Г	4
14.	А	4
15.	Б	4
16.	$V=1\text{ cm}^3$, $AC=\sqrt{6}\text{ cm}$ и $AB=\sqrt{10}\text{ cm}$	15
17.	а) $a=\frac{1}{3}$, $b=-6$ и $c=3$ б) $T(1;2)$ и $t: y=-x+3$	15
18.	а) $B(-1;-1)$ и $C(-10;5)$	15

	б) $P\left(\frac{1}{2};11\right)$ и $R=\frac{3}{2}\sqrt{65}$	

Задача 16.

Решение:

От равните околни ръбове следва, че върхът D се проектира ортогонално върху равнината на основата в центъра на описаната окръжност за $\triangle ABC$. От перпендикулярността се получава, че върхът D се проектира върху пресечницата AB. Оттук се получава, че $\triangle ABC$ е правоъгълен с хипотенуза AB.



Нека $AB=2x \quad \Rightarrow CH=\frac{1}{2}AB=x$, като медиана в правоъгълен триъгълник. От правоъгълните триъгълници $\triangle ABC$ и $\triangle CHD$ се получават ограниченията $\left|\begin{array}{l} AB>BC \\ CD>CH \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x>1 \\ x<2 \end{array}\right.$.

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=2\sqrt{x^2-1}\ \text{cm}$$

$$DH=\sqrt{CD^2-x^2}=\sqrt{4-x^2}\ \text{cm}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{AC.BC}{2}=2\sqrt{x^2-1}\ \text{cm}^2$$

$$V=\frac{1}{3}.2\sqrt{x^2-1}.\sqrt{4-x^2} \Rightarrow V=\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(4-x^2\right)}\ \text{cm}^3$$

Тъй като функцията $g(t)=\sqrt{t},\ t\geq 0$ е монотонно растяща, може да разглеждаме $f(x)=\left(x^2-1\right)\left(4-x^2\right)$ и най-голямата стойност на $f(x)$ и V ще се достига за една и съща стойност на x.

$$f(x)=-x^4+5x^2-4$$

$$f'(x)=-4x^3+10x=x\left(\sqrt{10}-2x\right)\left(\sqrt{10}+2x\right)$$

$f(x)$ расте за $x\in\left(1;\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ и намалява за $x\in\left(\frac{\sqrt{10}}{2};2\right)$.

Най-голямата стойност се достига при $x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\Rightarrow AC=\sqrt{6}$ cm, $AB=\sqrt{10}$ cm, $DH=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ cm.

$$V_{\max}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}.2}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=1\text{ cm}^3$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

$\triangle ABC$ е правоъгълен	2 точки
Въвеждане на неизвестно и определяне на интервала му на изменение	2 точки
Изразяване на обема чрез въведеното неизвестно	5 точки
Изследване на функция и намиране на НГС	3 точки
$V=1\text{ cm}^3$, $AC=\sqrt{6}$ cm и $AB=\sqrt{10}$ cm	3 точки

Задача 17.

Решение:

а)

$$3x^5-4x^4-11x^3-11x^2-4x+3=0$$

Уравнението е реципрочно от нечетна степен и $x=-1$ е корен на уравнението.

	3	–4	–11	–11	–4	3
–1	3	–7	–4	–7	3	0

$$3x^4-7x^3-4x^2-7x+3=0 : x^2\neq 0$$

$$3x^2-7x-4-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}=0$$

$$3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

Полагане $x+\dfrac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$.

Следователно се получава уравнението

$3t^2-6-7t-4=0 \Leftrightarrow 3t^2-7t-10=0$ с корени $t_1=\dfrac{10}{3}$ и $t_2=-1$.

За $t_1 = \frac{10}{3}$ се получава $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$ с корени $x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = 3$.

За $t_2 = -1$ се получава $x + \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ с $D = -3 < 0$ т.е. н.р.к $\Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

Забележка: Уравнението може да бъде решено и по схемата на Хорнер.

$$b = 4,(7) - 10\frac{7}{9} = 4 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... - 10\frac{7}{9}.$$

Редицата $\frac{7}{10}; \frac{7}{100}; \frac{7}{1000}; ...$ е безкрайно намаляваща геометрична прогресия с първи член $\frac{7}{10}$, частно $\frac{1}{10} < 1$ и сума $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... = \dfrac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$.

Следователно $b = 4 + \frac{7}{9} - 10\frac{7}{9} = -6$ т.е. $b = -6$.

$$c = \lim_{x \to 7} \frac{\sin(x-7)}{\sqrt{2x-5} - 3} = \lim_{x \to 7} \frac{\sin(x-7)\left(\sqrt{2x-5} + 3\right)}{\left(\sqrt{2x-5} - 3\right)\left(\sqrt{2x-5} + 3\right)}$$

$$c = \lim_{x \to 7} \frac{\sin(x-7)\left(\sqrt{2x-5} + 3\right)}{2x - 5 - 9} = \lim_{x \to 7} \frac{\sin(x-7)\left(\sqrt{2x-5} + 3\right)}{2(x-7)} = \frac{1}{2}.6 = 3 \text{ т.е. } c = 3.$$

б) $f(x) = 3x^2 - 7x + 6$

$f'(x) = 6x - 7 = \operatorname{tg}135° = -1 \Rightarrow 6x - 7 = -1 \Rightarrow x = 1$

Тогава $f(1) = 2$ и координатите на допирната точка са $T(1; 2)$.

Уравнението на допирателната в точката T е $t: y = -x + d$ и тъй като $2 = -1 + d$, то $t: y = -x + 3$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $a = \frac{1}{3}$, $b = -6$ и $c = 3$	12 точки
б) $T(1; 2)$ и $t: y = -x + 3$	3 точки

Задача 18.

Решение:

а) Тъй като височината и медианата са през върха B, то координатите на точката B са решение на системата: $\begin{vmatrix} 2x-y+1=0 \\ x+y+2=0 \end{vmatrix}$

Чрез събиране се получава системата $\begin{vmatrix} 3x+3=0 \\ x+y+2=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x=-1 \\ x+y+2=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x=-1 \\ y=-1 \end{vmatrix}$

Следователно координатите на върха B са $(-1;-1)$.

За да се намерят координатите на върха C, трябва да се намерят уравнението на правата AC и координатите на пресечната точка на медианата m и правата AC.

$AC \perp h \Rightarrow AC: x+2y+k=0$

$A \in AC \Rightarrow k=0$ т.е. $AC: x+2y=0$

$AC \cap m = M \Rightarrow \begin{vmatrix} x+2y=0 \\ x+y+2=0 \end{vmatrix}$

Чрез изваждане се получава системата $\begin{vmatrix} y-2=0 \\ x+2y=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y=2 \\ x+2y=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x=-4 \\ y=2 \end{vmatrix}$

Следователно координатите на M са $(-4;2)$.

Тъй като M е среда на страната AC, то координатите на върха C са решение на системата $\begin{vmatrix} \dfrac{2+x_C}{2}=-4 \\ \dfrac{-1+y_C}{2}=2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2+x_C=-8 \\ -1+y_C=4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_C=-10 \\ y_C=5 \end{vmatrix}$.

Следователно координатите на върха C са $(-10;5)$.

б) Ако центърът, точка P, има координати $(\alpha;\beta)$, то окръжността има уравнение: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

Тъй като върховете A, B и C са от окръжността, то се получава системата:

$$\begin{vmatrix} (2-\alpha)^2+(-1-\beta)^2=R^2 \\ (-1-\alpha)^2+(-1-\beta)^2=R^2 \\ (-10-\alpha)^2+(5-\beta)^2=R^2 \end{vmatrix} \text{ т.е. } \begin{vmatrix} (2-\alpha)^2+(1+\beta)^2=R^2 \\ (1+\alpha)^2+(1+\beta)^2=R^2 \\ (10+\alpha)^2+(5-\beta)^2=R^2 \end{vmatrix}$$

След изваждане на първите две уравнения се получава уравнението

$$(2-\alpha)^2-(1+\alpha)^2=0 \Leftrightarrow 6\alpha=-3 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

Следователно $\left|\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^2+(1+\beta)^2=R^2\\ \left(10\frac{1}{2}\right)^2+(5-\beta)^2=R^2\end{array}\right.$

Изваждат се двете уравнения и се получава:

$$\frac{441}{4}+(5-\beta)^2=\frac{9}{4}+(1+\beta)^2 \Leftrightarrow 12\beta=132 \Leftrightarrow \beta=11$$

Следователно координатите на центъра P са $\left(\frac{1}{2};11\right)$.

Получената стойност за $\beta=11$ се замества в едно от уравненията $\left|\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^2+(1+\beta)^2=R^2\\ \left(10\frac{1}{2}\right)^2+(5-\beta)^2=R^2\end{array}\right.$ т.е. $R^2=\frac{585}{4} \Rightarrow R=\frac{3}{2}\sqrt{65}$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $B(-1;-1)$	2 точки
$C(-10;5)$	6 точки
б) $P\left(\frac{1}{2};11\right)$ и $R=\frac{3}{2}\sqrt{65}$	7 точки